**«Сам себе репетитор»**

**Решения некоторых видов уравнений и неравенств**

**Линейные уравнения**

*Уравнением первой степени с одним неизвестным*, или ***линейным*** уравнением, называется уравнение вида *ax* + *b* = 0.

Если ***a ≠ 0*** оно имеет единственный корень х =

*Пример 1. Пример 2.*

3x = 18 8x – 2 = 14

x = 18 : 3 8x = 14 + 2

x = 6 x = 16 : 8

Ответ: х = 6 x = 2

Ответ: х = 2

Если ***a=0; b=0*** имеет бесконечное множество корней.

*Пример 3.*

4x – 2 = 4x – 2

4х – 4х = 2 – 2

0 = 0

Если ***a=0; b≠ 0*** *не иметь решений.*

*Пример 4.*

5x + 8 = 5x – 1

5х – 5х = - 8 – 1

0 = - 9

Основные свойства уравнений:

1. Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.
2. Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и тоже число, не равное нулю.

Применяя эти свойства, уравнения, сводящиеся к линейным, обычно решают так:

1. переносят члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестного, в правую (свойство1);
2. приводят подобные члены;
3. делят обе части уравнения на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю (свойство 2).

***Примеры решения уравнений,***

***сводящихся к линейным***

1.

Перенесем все члены, содержащие *х* в левую часть равенства, а все члены, не содержащие *х* – в правую, меняя при этом их знаки на противоположные:

Приведем подобные:

х = :

х = 4

Ответ: х = 4

2.

Приведем подобные в левой части уравнения:

3х – 6 = 0

Число без переменной перенесем в правую часть уравнения и поменяем знак (по свойству уравнений):

х = 2   
Ответ: х = 2

3.

Откроем скобки в левой части уравнения (3 умножим на каждое слагаемое в скобках):

Перенесем члены, содержащие *х* в левую часть равенства, а члены, не содержащие *х* – в правую, меняя при этом их знаки на противоположные:

Приведем подобные:

Ответ:

4.

Откроем скобки в левой и правой частях уравнения (в левой части уравнения поменяем знаки у слагаемых на противоположные, т.к. перед скобкой стоит знак минус):

Перенесем все члены, содержащие *х* в левую часть равенства, а все члены, не содержащие *х* – в правую, меняя при этом их знаки на противоположные:

Приведем подобные:

Ответ:

5. http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1460.gif.

Умножим обе части уравнения на наименьший общий знаменатель дробей, входящих в это уравнение.

Общим знаменателем чисел 2 и 5 будет 10.

Найдем дополнительные множители для каждого члена равенства, получим:

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1461.gif

Раскроем скобки и приведем подобные в обеих частях равенства:

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1462.gif

Перенесем все члены, содержащие *х* в левую часть равенства, а все члены, не содержащие *х* - в правую, и приведем подобные:

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1463.gif

*х* = 3.

Ответ: 3

**Тренажер**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1551.gif | *Ответ: 17* |
| 2. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1630.gif | *Ответ: -2* |
| 3. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1553.gif | *Ответ: -1* |
| 4. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1554.gif | *Ответ: 1* |

**Квадратные уравнения**

***Квадратным уравнением*** называется уравнение вида

|  |  |
| --- | --- |
| http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1474.gif*,* | (1) |

где *а, b* и *с* - произвольные действительные числа, причем http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1475.gif

Если в квадратном уравнении, хотя бы один из коэффициентов *b* или *с* равен нулю, то такое уравнение называется *неполным* квадратным уравнением. Следовательно, неполные квадратные уравнения могут быть таких видов:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1)*ax2*+*c*=0 | 2)*ax2*+*bx*=0 | (2) |

Если в уравнении (1) *a* = 1, то уравнение называется *приведенным*. Его обычно записывают в виде:

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1476.gif

Рассмотрим решение квадратных уравнений.

1. Чтобы решить неполное квадратное уравнение вида

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1477.gif

перенесем его свободный член *с* в правую часть и разделим обе части уравнения на *а*. Мы получим уравнение вида

|  |  |
| --- | --- |
| http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1478.gif | (3) |

которое равносильно исходному.

а) Если *с*=0, то уравнение (3) имеет единственный корень *x* =0.

б) Если http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1626.gifто уравнение (3) имеет два корня:

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1480.gifи http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1481.gif.

в) Если http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1624.gif, то уравнение (3) действительных корней не имеет.

2. Для решения неполного квадратного уравнения вида

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1483.gif

при http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1484.gifразложим его левую часть на множители. Мы получим, что

|  |  |
| --- | --- |
| http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1485.gif | (4) |

Произведение может быть равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю:

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1487.gifили http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1488.gif.

Следовательно корнями уравнения (4) являются значения

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1489.gifи http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1490.gif.

Неполное квадратное уравнение http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1483.gifпри http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1491.gifвсегда имеет два корня.

3. Корни квадратного уравнения общего вида (1) вычисляются по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1492.gif | (5) |

Выражение *D* = *b2 - 4ac* называется *дискриминантом* квадратного уравнения.

Из (5) следует, что:

а) если *D>0*, то уравнение (1) имеет два различных действительных корня;

б) если *D=0*, то уравнение (1) имеет один корень http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1493.gif

в) если *D < 0*, то уравнение (1) действительных корней не имеет.

Заметим здесь, что если в квадратном уравнении (1) коэффициент *b* - число четное, т.е. уравнение имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
| http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1494.gif | (6) |

то корни квадратного уравнения можно вычислить по формуле:

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1495.gif

4. Корни приведенного квадратного уравнения можно вычислять по формуле:

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1496.gif

Их также можно находить с помощью теоремы Виета.

***Теорема.*** Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену:

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1497.gifhttp://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1498.gif

**Пример 1.**

Решите уравнение: http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1499.gif. В ответе укажите больший корень уравнения.

*Решение.* Перенесем свободный член в правую часть уравнения и разделим обе части получившегося уравнения на 4:

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1501.gifоткуда http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1502.gif.

Ответ: 1,5

**Пример 2.**

Решите уравнение: http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1503.gif. В ответе укажите меньший корень уравнения.

*Решение***.** Вынесем *x* за скобку:

или

4х = 3

х =

Следовательно, х2 =

Ответ: 0

**Пример 3.**

Решите уравнение: http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1507.gif. В ответе укажите наименьший корень уравнения.

*Решение.*Введем новую переменную

|  |  |
| --- | --- |
| http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1508.gif | (7) |

Тогда исходное уравнение примет вид:

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1509.gif.

Найдем его корни:

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1627.gif

Подставляя найденные значения *y* в формулу замены (6), получим два уравнения:

*x 2*- 2*x* – 8 = 0 и *x2* – 2 *x*- 3 = 0*.*

Корни этих уравнений легко угадать, используя теорему Виета. Корни первого уравнения: *x1=* 4*, x2= -*2*.* Корни второго уравнения: *x1=* 3*, x2= -*1*.* Решение исходного уравнения: *x1=* 4, *x2= -*2*, x3*= 3*, x4= -*1*.*

Ответ: -2

Общий алгоритм решения квадратного уравнения

Исходя из вышесказанного, сформулируем

общий алгоритм решения квадратного уравнения ax2 + bx + c = 0

1) Определяем коэффициенты а, b, с.

2) Вычисляем дискриминант D = b2 - 4ас

3) Определяем сколько будет корней:

D корней нет

D два различных корня

D два равных корня

4) Находим корни уравнения по формуле

5) Записываем ответ.

Данный алгоритм универсален и подходит для решения любых квадратных уравнений. Полных и неполных, приведенных и не приведенных.

4. х2 – 3х – 40 = 0

1) а = 1 2) D = b2 - 4ас = (-3)2 - 41(-40) = 9+160 = 169

в = - 3 3) 169 2 корня

с = - 40 4)

х1== 8 х2== -5

5) Ответ: х1=8; х2= -5

5.х2 – 24 = -5х

х2 – 24 + 5х = 0

1) а = 1 2) D= b2- 4ас = 52-41(-24) = 25+96 = 121

в = -5 3) 121 2 корня

с=-24 4)

х1= = 3

х2 == - 8

5) Ответ: х1= 3; х2 = - 8

5. х2- 6х = 5х – 12 - х2

Используя свойства уравнений, приведем к общему виду квадратного уравнения:

х2- 6х - 5х + 12+ х2= 0

2х2-11х+12=0

1)а= 2 2) D= b2- 4ас= (-15)2-4213=225-104=121

b= -15 3) 121 2 корня

с=13 4)

х1==1

х2= = 6,5

5) Ответ: х1=1; х2=6,5

6.–х2+ 3х+ 55= (х+7)2

Открываем скобки в правой части по формуле квадрата суммы

-х2+ 3х+ 55 = х2+14х+49

Переносим все члены уравнения из правой части в левую, изменив знаки на противоположные:

-х2+ 3х+ 55 -х2- 14х -49=0

Приведем подобные, получим квадратное уравнение:

-2х2- 11х+ 6 =0

Решаем по алгоритму:

1)а= -2 2) D= b2-4ас= (-11)2-46(-2)=121+48=169

b = -11 3) 169 2 корня

с = 6

х1= = - 6

х2= = 0,5

5) Ответ: х1= 6; х2 = 0,5

**Тренажер**

1)Решить уравнения:

**а)** 2х2 + 3х – 2 = 0 **б)** 5 х2 – 7х + 2 = 0 **в)** 3 х2 + 8х – 3 = 0

**г)** - х2 + 2х + 8 = 0 **д)** 3 х2 + 5х – 2 = 0 **е)** 2 х2 – 7х + 3 = 0

**ж)** - х2 + 7х – 10 = 0 **з)** 3 х2 + 2х – 5 = 0 **и)** 9 х2 – 6х + 1 = 0

**к)** 5 х2 - 3х – 2 = 0 **л)** 4 х2 + 4х + 1 = 0 **м)** 6 х2 + х - 1 = 0

**н)** - х2 + 7х + 8 = 0 **о)** 2 х2 – 5х + 3 = 0 **п)** - х2 – 2х +15 = 0

**р)** х2 – 5х – 1 = 0 **с)** 5 х2- 8х – 4 = 0 **т)** х2 + 3х + 1 = 0

**у)** 6х2 – 7х + 1 = 0 **ф)** 3 х2 + 7х – 6 = 0 **ч)** 5 х2 – 8х + 3 = 0

ц) 2 х2 – 9х + 4 = 0 **ш)** 7х2 + 9х + 2 = 0 **щ)** 2 х2 + 3х – 5 = 0

2) Решить уравнения, приводящиеся к квадратным:

**а)** 3 х2 + 9 = 12х - х2 **б)** 18 - х2= 14 **в)** х2 + 3 = 3 – х

**г)** х(х+2)=2 **д)** х2- 6х = 4х – 25 **е)** х(2х+1) = 3х + 4

**ж)** (10х - 4)(3х + 2)=0 **з)** (х-1)(5х+)= 0 **и)** 9(х-8)(6х-4) = 0

**к)** х(х+3) – 4(х-5) = 7(х+4) – 8

**Дробно-рациональные уравнения**

*Рациональное уравнение, в котором левая или правая части являются дробными выражениями, называются дробно-рациональными уравнениями. Дробно-рациональные уравнения, как правило, приводятся к виду:*

, где P(x) и Q(x) – многочлены.

***Пример.*** 

Для решения подобных уравнений умножить обе части уравнения на Q(x), что может привести к появлению посторонних корней. Поэтому, при решении дробно-рациональных уравнений необходима проверка найденных корней.



Решение дробно-рационального уравнения сводится в конечном итоге к замене исходного уравнения целым уравнением, которое равносильно исходному уравнению или является его следствием.

При решении дробного уравнения целесообразно поступать следующим образом:

1) определить область допустимых значений переменной *х* (ОДЗ);

2) найти наименьший общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;

3) умножить обе части уравнения на общий знаменатель и привести подобные;

4) решить получившееся целое уравнение.

Описанные преобразования не сужают ОДЗ переменной *х*, но могут ее расширить. Следовательно, в результате указанных преобразований возможно появление посторонних корней, (но не их потеря). Получив решение преобразованного уравнения, следует отбросить те его корни, которые обращают в нуль общий знаменатель исходного уравнения.

Пример 1.

|  |  |
| --- | --- |
| http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1544.gif |  |

*Решение.*Найдем ОДЗ уравнения. Поскольку знаменатели дробей не могут обращаться в ноль, то и .

Умножим теперь обе части уравнения на общий знаменатель, который равен (*х*+1)(*х*+3). Мы получим уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
| http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1547.gif, |  |

Раскроем скобки в обеих частях равенства и приведем подобные. Мы получим:

http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1549.gif

откуда

Решив неполное квадратное уравнение мы будем иметь

*х*1= 0 и *х*2= -1. Значение *х*2= -1 не входят в ОДЗ уравнения. Единственный корень исходного уравнения есть *х*=0.

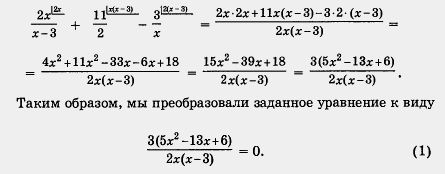
Ответ: 0

Пример 2. Решить уравнение

*Решение*. Приравняем уравнение к 0.

Перенесём член  в левую часть уравнения с противоположным знаком.

Выполним преобразования левой части уравнения. Имеем



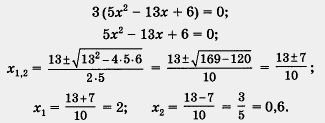
Вспомним условия равенства дроби нулю: 

тогда, и только тогда, когда одновременно выполняются два соотношения:

1) числитель дроби равен нулю (а = 0);

2) знаменатель дроби отличен от нуля 

Приравняв к нулю числитель дроби в левой части уравнения (1), получим



Осталось проверить выполнение второго указанного выше условия. Соотношение  означает для уравнения (1), что 

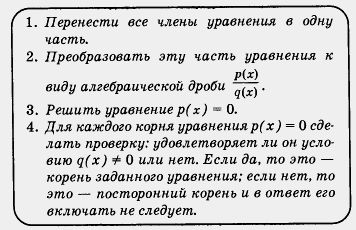
Значения х1 = 2 и х2 = 0,6 указанным соотношениям удовлетворяют и потому служат корнями уравнения (1), а вместе с тем и корнями заданного уравнения.

Ответ: 2; 0,6.

Если среди корней числителя окажется число, при котором знаменатель дроби обращается в нуль, то такое число корнем уравнения быть не может, его называют посторонним корнем и в ответ не включают.

Опираясь на решенный пример, сформулируем следующий алгоритм.

Алгоритм решения рационального уравнения:



Пример 3. Решить уравнение

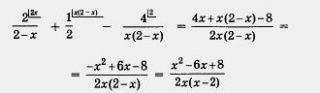


*Решение*. Будем действовать в соответствии с алгоритмом.

1) Преобразуем уравнение к виду



2) Выполним преобразования левой части этого уравнения:

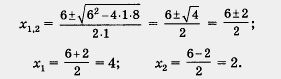


(одновременно изменили знаки в числителе и знаменателе дроби).

Таким образом, заданное уравнение принимает вид



3) Решим уравнение х2 - 6x + 8 = 0. Находим



4) Для найденных значений проверим выполнение условия 

Число 4 этому условию удовлетворяет, а число 2 — нет. Значит, 4 — корень заданного уравнения, а 2 — посторонний корень.

О т в е т: 4.

Решение рациональных уравнений методом введения новой переменной

Покажем на примерах, как метод введения новой переменной применяется при решении рациональных уравнений.

Пример 4**.**



*Решение*. Заметим, что здесь дважды встречается одно и то же выражение х2+3х. Значит, имеет смысл ввести новую переменную у = х2 + 3х. Это позволит переписать уравнение в более простом и приятном виде (что, собственно говоря, и составляет цель введения новой переменной — и запись упрощается, и структура уравнения становится более ясной):



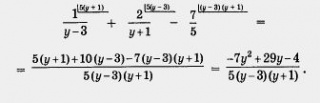
А теперь воспользуемся алгоритмом решения рационального уравнения.

1) Перенесем все члены уравнения в одну часть:



= 0

2) Преобразуем левую часть уравнения



Итак, мы преобразовали заданное уравнение к виду



3) Из уравнения - 7у2 + 29у -4 = 0 находим



4) Выполним проверку найденных корней с помощью условия 5 (у - 3) (у + 1) 

Оба корня этому условию удовлетворяют.

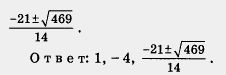
Итак, квадратное уравнение относительно новой переменной у решено:



Поскольку у = х2 + 3х, а у, как мы установили, принимает два значения: 4 и — нам еще предстоит решить два уравнения: х2 + 3х = 4;

х2 + 3х = 

Корнями первого уравнения являются числа 1 и - 4, корнями второго уравнения — числа



В рассмотренных примерах одно и то же выражение явно встречалось в записи уравнения несколько раз и был резон обозначить это выражение новой буквой. Но так бывает не всегда, иногда новая переменная «проявляется» только в процессе преобразований.

Пример 5.

х(х - 1)(x-2)(x-3) = 24.

*Решение*. Имеем

х(х - 3) = х2 - 3х;

(х - 1)(x - 2) = x2-Зx+2.

Значит, заданное уравнение можно переписать в виде

(x2 - 3x)(x2 + 3x + 2) = 24

Вот теперь новая переменная «проявилась»: у = х2 - 3х.

С ее помощью уравнение можно переписать в виде

у (у + 2) = 24

у2 + 2у - 24 = 0.

Корнями этого уравнения служат числа 4 и -6.

Возвращаясь к исходной переменной х, получаем два уравнения х2 - 3х = 4 и х2 - 3х = - 6. Из первого уравнения находим х1 = 4, х2 = - 1; второе уравнение не имеет корней.

О т в е т: 4, — 1.

Пример 6.

х4 + х2 - 20 = 0.

*Решение*. Введем новую переменную у = х2.

Так как х4 = (х2)2 = у2, то заданное уравнение можно переписать в виде

у2 + у - 20 = 0.

Это — квадратное уравнение, корни которого найдем, используя известные формулы; получим у1 = 4, у2 = - 5.

Но у = х2, значит, задача свелась к решению двух уравнений:

x2=4; х2=-5.

Из первого уравнения находим 

второе уравнение не имеет корней.

Ответ: 

Уравнение вида ах4+bx2+с=0 называют **биквадратным уравнением** («би» — два, т. е. как бы «дважды квадратное» уравнение). Только что решенное уравнение было именно биквадратным. Любое биквадратное уравнение решается так же, как уравнение из примера 5:

1. вводят новую переменную у = х2,
2. решают полученное квадратное уравнение относительно переменной у,
3. возвращаются к переменной х.

1.2) *=*

*Ответ:*

*2. -посторонний корень  
Ответ:*

*3.*

*посторонний корень  
Ответ:*

*4.   
Ответ*

*5.*

*Ответ:*

**Тренажер**

*Решить уравнения:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1567.gif | *Ответ: 4* |
| 2. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1568.gif | *Ответ: 3* |

*Решите уравнения. В ответе укажите наибольший корень уравнения.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1569.gif | *Ответ: 5* |
| 4. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1570.gif | *Ответ: 5* |
| 5. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1571.gif | *Ответ: 3* |
| 6. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1572.gif | *Ответ: 1* |
| 7. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1573.gif | *Ответ: 3* |
| 8. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1574.gif | *Ответ: 2* |

*Решите уравнения. В ответе укажите наименьший корень уравнения.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 9. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1575.gif | *Ответ: -0,5* |
| 10. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1576.gif | *Ответ: -2* |
| 11. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1577.gif | *Ответ: -2* |
| 12. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1578.gif | *Ответ: 1,5* |
| 13. | http://twww.bti.secna.ru/education_/abiture/abitur/matem/image1579.gif | *Ответ: -5* |

14**.** 6х4 + х2 – 1 = 0

**Неравенство** – отношение, связывающее два числа а1 и а2 и посредством одного из знаков: < (меньше), ≤(меньше или равно),> (больше), ≥(больше или равно),≠ (неравно), то есть

а1 > а2, а1 < а2, а1 ≥ а2, а1 ≤ а2, а1 ≠ а2.

*Решением неравенств с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.*

Решить неравенство значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Неравенство, имеющие одни и те же решения, называются *равносильными*.

Неравенства, не имеющие решения, также считают равносильными.

При решении неравенств используются следующие свойства:

1. Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.
2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство.
3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

*Например*, неравенство

18+6х>0

равносильно неравенству

6х>-18,

а неравенство 6х>-18 равносильно неравенству х>-3.

**Линейные неравенства**

Нужно заменить заданное неравенство равносильным ему неравенством вида ах>b или ах<b, где а и b – некоторые числа. Неравенства такого вида называют *линейными неравенствами с одной переменной*.

Например:

х+3 **>** 5х-5

Такие неравенства решаются с помощью [тождественных преобразований неравенств](http://www.egesdam.ru/page323.php#tpn).

Решаем это неравенство:

х+3 **>** 5х-5

Решаем точно так же, как и линейное уравнение. С единственным отличием:

*Внимательно следим за знаком неравенства!*

Первый шаг самый обычный. С иксами - влево, без иксов - вправо... Это первое тождественное преобразование, простое и безотказное.) Только знаки у переносимых членов не забываем менять.

Знак неравенства сохраняется:

х-5х **>** -5-3

Приводим подобные.

Знак неравенства сохраняется:

-4х **>** -8

Осталось применить последнее тождественное преобразование: разделить обе части на -4.

Делим на **отрицательное** число.

Знак неравенства изменится на противоположный:

х **<** 2

Это ответ.

Так решаются все линейные неравенства.

***Линейные неравенства на числовой оси***

Любой ответ линейного неравенства, типа х **< 2,** или х **≥ -0,5** можно изобразить на числовой оси.

*1. Решить неравенство:*

*4х - 3* ***≠*** *0*

Задания в таком виде встречаются редко. Но, как вспомогательные неравенства, при нахождении [ОДЗ,](http://www.egesdam.ru/page222.html#odz) например, или при нахождении [области определения функции,](http://helpmatan.ru/page102.php) - встречаются сплошь и рядом. Такое линейное неравенство можно решать как обычное линейное уравнение. Только везде, кроме знака "=" (*равно*) ставить знак "**≠**" (*не равно*). Так к ответу и подойдёте, со знаком неравенства:

*х* ***≠*** *0,75*

*2. Найти наименьшее целое решение неравенства:*

*3(х - 1)* ***<*** *5х + 9*

Сначала просто решаем неравенство. Раскрываем скобки, переносим, приводим подобные... Получаем:

*3х – 3 5х + 9*

*3х – 5х 9 +3*

*- 2х 12*

*х 12 : (-2)*

*х*

*Ответ: -7*

Алгоритм решение линейных неравенств

1. Раскрыть скобки (если нужно).
2. Неизвестные перенести в левую часть неравенства, известные в правую часть. ( При переносе знаки перед слагаемыми изменить на противоположные: “-“ на “+“; “+“ на “-“; знак неравенства сохраняется).
3. В каждой части привести подобные слагаемые, получаем неравенство вида: ax < b или ax > b или ax ≤ b или ax ≥ b.
4. Чтобы найти x, число (b), стоящее в правой части разделить на коэффициент при x (a), причём, если a>o, то знак неравенства сохраняется, если a<0, то знак меняется на противоположный ( “<” на “>”; “>” на “<”; “≤” на “≥”; “≥” на “≤”).
5. Решение изобразить на числовой прямой и ответ записать промежутком.
6. 3х -2 >17

3х >17+2

3х >19

х > 19 : 3

х > 6

*Ответ*: (6 +∞)

1. -3 – 3х> 7x-9

-3x-7x>-6

-10x > -6

x< -6: (-10)

x<0,6

*Ответ*: (0,6;+∞)

1. 3х – 2(х-5) ≤ -6

3х – 2х + 10 ≤ -6

х + 16 ≤ 0

х ≤ -16

*Ответ*: (- ∞; -16]

1. ≥ 1

3х - 28 + 8х ≥ 12

11х ≥ 40

х ≥ 40 : 11

х ≥ 3,63

*Ответ*: [3,63; +∞)

1. 10х – 2 < 0

10x < 2

х< 2 : 10

х<0,2

*Ответ*: (-∞; 0,2)

**Неравенство второй степени с одной переменной**

Неравенства вида ax2+bx+c>0 и ax2+bx+c<0, где х- переменная, a,b,c-некоторые числа и а≠0, называют *неравенствами второй степени с одной переменной.*

Решить неравенство x2-5x+6 > 0.

*Решение.*

Сначала решим квадратное уравнение x2-5x+6=0, любым из известных способов. Его корни равны х=2 и х=3.

Теперь разложим трехчлен x2-5x+6  на множители. Получим:

(х-2)(х-3).

Перепишем исходное неравенство:

 (х-2)(х-3) > 0.

Произведение двух сомножителей будет положительным, если оба сомножителя имеют одинаковый знак, то есть либо оба сомножителя больше нуля, либо оба сомножителя меньше нуля.

Рассмотрим два случая.

1. Оба сомножителя больше нуля. Получаем систему уравнений.

{x-2 > 0  
{x-3 > 0

Решаем её и получаем ответ х > 3.

2. Оба сомножителя меньше нуля. Получаем систему уравнений

{x-2<0  
{x-3<0

Решаем её и получаем ответ х<2.

Объединяем оба полученных ответа, и записываем общий ответ.

Ответ: х3.

1)3х2 – 11х – 4 < 0

а= 3 D= в2-4ас= (-11)2- 43(-4) = 121 + 48 = 169

в= - 11 =13

с= - 4

х1== 4

х2==

*Ответ*: ()

2)-5x2 – 9x + 2< 0

а= -5 D= в2-4ас= (9)2 – 4 2 (-5) =81 + 40 = 121

в= -9 =11

с=-2

х1== = - 2

х2== 0,2

*Ответ:* (-∞; -2) ᴗ (0,2 ;∞)

3)(x – 1)(x – 2) ≥ 0

х – 1 ≥0 x- 2 ≥0

х ≥ 1 x ≥ 2

*Ответ*: (-∞; 1] ᴗ [2; ∞)

4)х2 - 9 ≤ 0

х2 ≤ 9

х ≤ ±3

*Ответ:* (-∞; - 3]ᴗ[3; ∞ )



-3х2- 6х + 9 < 0

а= -3 D= в2-4ас= (-6)2 – 4\*9\*(-3) =36 +108 = 144

в= -6 D=12

с= 9

х1== = - 3

х2== 1

Ответ: (-∞; - 3) ᴗ (1;∞)

***Решение неравенств методом интервалов***

Решим неравенство (х+6)(х+1)(х-4)<0

Отметим на координатной прямой нули функции f(x)=(х+6)(х+1)(х-4)

Найдём знаки этой функции в каждом из промежутков

(-∞;-6), (-6;-1), (-1;4),(4;+∞)



-6 -1 4

Из рисунка видно, что множеством решений неравенства является объединение промежутков (-∞;-6)∪(-1;4).

Пример: 

Решим уравнения: х+17=0 и x2 − x − 6 = 0.

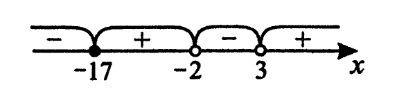
Из первого уравнения находим x1 = − 17.

Из второго уравнения находим x2=−2; x3=3.

Так как неравенство нестрогое, точку x1 = − 17 отметим закрашенной, а точки -2 и 3 выкалим, т.к. они не подходят по ОДЗ.

Эти точки разбивают ось на 4 интервала:

(-∞;-17],[-17;-2),(-2;3),(3;+∞)



*Ответ*: х∈[-17;-2)∪ (3;+∞)

Решение неравенства ax2+bx+c>0 или ax2+bx+c<0

можно рассматривать как нахождение промежутков, в которых функция у = ax2+bx+c принимает положительные или отрицательные значения. Для этого достаточно проанализировать, как расположен график функции

у = ax2+bx+c в координатной плоскости: куда направлены ветви параболы − вверх или вниз, пересекает ли парабола ось х и если пересекает, то в каких точках.

***Пример 1***. Решим неравенство 5х2+9х-2<0

Рассмотрим функцию у=5х2+9х-2 − это квадратичная функция; графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Выясним, как расположена эта парабола относительно оси х.

Для этого решим уравнение

5х2 + 9х – 2 = 0

D = 81 + 40 = 121>0 ( 2 корня)

х1 = 0,2 и х2 = -2.

Покажем схематически, как расположена парабола в координатной плоскости.



y>0 при х∈(-∞;-2)∪(0,2;+∞)

*Ответ:* (-∞;-2)∪(0,2;+∞)

Алгоритм решения неравенств  второй степени

с одной переменной

1. Привести неравенство к виду ах2+bх+с > 0 (ах2 + bх + с < 0).

2. Ввести функцию f (х) = ах2 + bх + с и охарактеризовать её.

3. Найти нули функции, т.е. решить уравнение f (х) = 0.

4. Отметить на оси х  нули функции и изобразить схематически параболу.

5. Отметить промежутки, которые будут являться решениями данного неравенства (внимательно смотреть знак неравенства).

6. Записать ответ.

*= -7  
Ответ:*

*Ответ:*

*0*

*Ответ:*

*4.*

*Ответ:*

*5.*

*Ответ:*